BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

УДК 517.53

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

М.А.ТАГИЕВА
Бакинский Государственный Университет
mtagiyeva@mail.ru

В работе получено интегральное представление частичной суммы просуммированного ряда по обобщённым полиномам Фабера и доказана сходимость последовательности таких обобщённых полиномов к обобщённой аналитической функции внутри области, ограниченной спрямляемой жордановой кривой.

Ключевые слова: обобщённые аналитические функции, обобщённые полиномы Фабера, полиномиальное ядро, жорданова спрямляемая кривая.

Пусть G - произвольная конечная область с односвязным дополнением $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ и спрямляемой жордановой границей Γ. Пусть $\Phi(z)$ - функция, осуществляющая однолистное и конформное отображение внешности G на внешность единичного круга $\{|\omega| \le 1\}$ так, что при этом

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1 .$$

Через $\psi(\omega)$ обозначим функцию, обратную к $\omega = \Phi(z) : \psi(\omega) = \Phi^{-1}(\omega)$.

Для приближения обобщённых аналитических функций (о.а.ф.), [1] заданных в указанных выше областях, мы будем пользоваться специально построенными обобщёнными полиномами (о.п.), конструкция которых даётся ниже. Это представление является аналогом формулы В.К.Дзядыка [2] в классе о.а.ф.

Имеет место

Теорема 1. Пусть G - произвольная конечная область с односвязным дополнением D и спрямляемой жордановой границей Γ. Пусть $w(z)$ - о.а.ф. в области G и непрерывная в $\overline{G}$. Тогда для любого тригонометрического полинома порядка n

$$K_n(t) = \sum_{m=-n}^{n} \lambda_m e^{imt} \tag{1}$$

интеграл

$$\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt \int_{\Gamma} \Omega_1(z,\varsigma,G) w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))d\varsigma -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{K_n(t)}dt \int_{\Gamma} \Omega_2(z,\varsigma,G) w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))d\varsigma \tag{2}$$

при всех $z \in G$ является о.п. порядка n вида

$$\mathscr{P}_n(z,G) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}(\lambda_k a_k)\Phi_{2k}(z) + \operatorname{Im}(\lambda_k a_k)\Phi_{2k+1}(z), \tag{3}$$

где $\Phi_k(z)$ - о.п. Фабера для области G, а

$$a_k = c_{2k} + ic_{2k+1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(\psi(e^{it}))e^{-ikt}dt \tag{4}$$

- коэффициенты Фабера о.а. функции $w(z)$ [3] .

Доказательство. Отправляясь от функции $w(\varsigma)$, $\varsigma \in \Gamma$, и полинома (1), рассмотрим следующий тригонометрический полином порядка n

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(\psi(e^{-i(\tau-t)}))K_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(\psi(e^{-it}))K_n(\tau-t)dt =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k a_k e^{ik\tau} = P_n(e^{i\tau}), \tag{5}$$

где коэффициенты a_k вычисляются по формулам (4).

Учитывая, что в точках $\varsigma \in \Gamma$ имеет место равенство $|\Phi(\varsigma)| = 1$, и значит, для каждого $\varsigma \in \Gamma$ существует число $\tau \in [0,2\pi)$ такое, что $\Phi(\varsigma) = e^{i\tau}$, в силу (5), имеем

$$P_n(\Phi(\varsigma)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))K_n(t)dt. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$P_n(\Phi(\varsigma)) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k a_k (\Phi(\varsigma))^k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \Phi_k(\varsigma) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{-j}}{\varsigma^j} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \Phi_k(\varsigma) + E_n(\varsigma), \tag{7}$$

где $\Phi_k(z)$ - полиномы Фабера для области G, $E_n(z)$ - функция, голоморфная в области D, непрерывная в $\overline{D}$, и $E_n(\infty) = 0$.

Подействуем обобщённым оператором Фабера для области G на полином $P_n(e^{i\tau})$ [4]. Он преобразует полиномы $P_n(\omega)$, $|\omega| \le 1$, в о.п. $\mathscr{P}_n(z,G)$, составленные по о.п. Фабера для области G [4]. Имеем

$$\mathscr{P}_n(z,G) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\varsigma,G)P_n(\Phi(\varsigma))d\varsigma - \overline{\Omega_1(z,\varsigma,G)P_n(\Phi(\varsigma))d\varsigma},\ z \in G. \quad (8)$$

Подставляя в (8) равенство (6), получим

$$\mathscr{P}_n(z,G) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\varsigma,G)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))K_n(t)dt\right)d\varsigma -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_2(z,\varsigma,G)\overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))K_n(t)dt\right)d\varsigma} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\varsigma,G)w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))d\varsigma -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{K_n(t)}dt\int_{\Gamma} \Omega_2(z,\varsigma,G)\overline{w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))d\varsigma}. \quad (9)$$

Подставляя теперь в (8) равенство (7) и используя интегральную теорему Коши, найдём:

$$\mathscr{P}_n(z,G) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\varsigma,G)\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \Phi_k(\varsigma) + E_n(\varsigma)\right)d\varsigma -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_2(z,\varsigma,G)\overline{\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \Phi_k(\varsigma) + E_n(\varsigma)\right)d\varsigma} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\varsigma,G)\Phi_k(\varsigma)d\varsigma -$$

$$-\sum_{k=0}^{n} \overline{\lambda_k a_k} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\varsigma,G)\overline{\Phi_k(\varsigma)}d\varsigma =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Re}(\lambda_k a_k) + i\,\mathrm{Im}(\lambda_k a_k))\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\varsigma,G)\Phi_k(\varsigma)d\varsigma -$$

$$-\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Re}(\lambda_k a_k) - i\,\mathrm{Im}(\lambda_k a_k))\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_2(z,\varsigma,G)\overline{\Phi_k(\varsigma)d\varsigma} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(\lambda_k a_k)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\varsigma,G)\Phi_k(\varsigma)d\varsigma - \Omega_2(z,\varsigma,G)\overline{\Phi_k(\varsigma)d\varsigma} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(\lambda_k a_k)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\varsigma,G)i\Phi_k(\varsigma)d\varsigma - \Omega_2(z,\varsigma,G)\overline{i\Phi_k(\varsigma)d\varsigma} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(\lambda_k a_k)\Phi_{2k}(z,G) + \mathrm{Im}(\lambda_k a_k)\Phi_{2k+1}(z,G). \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), получим утверждение теоремы (см. (2) и (3)). Теорема доказана.

Полином (1) называется ядром, если выполняется условие

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1.$$

В этом случае функцию $w(z)$, о.а. в области G и непрерывную в $\overline{G}$, для всех $z \in G$ можно представить в виде

$$w(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\varsigma,G)w(\varsigma)d\varsigma -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{K_n(t)}dt\int_{\Gamma}\Omega_2(z,\varsigma,G)\overline{w(\varsigma)d\varsigma}. \qquad (11)$$

Имеет место

Теорема 2. Пусть в конечной односвязной области G, ограниченной спрямляемой жордановой кривой Γ задана функция $w(z)$, о.а. в области G и непрерывная в $\overline{G}$. Пусть для членов последовательности ядер $\{K_n(t)\}$ выполняются условия:

1) $K_n(t)$ является чётной функцией и имеет вид

$$K_n(t) = 1 + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \lambda_k^{(n)} e^{ikt}, \qquad (\lambda_{-k} = \lambda_k);$$

2) $\int_{0}^{\pi}|K_n(\theta)|d\theta \le A$;

3) при любом малом $\delta > 0$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\delta,\varepsilon)$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\int_{\delta}^{\pi}|K_n(\theta)|d\theta < \varepsilon.$$

Тогда последовательность о.п. $\{\mathcal{P}_n(z)\}$ вида (3) сходится к $w(z)$ равномерно внутри области G при $n \to \infty$.

Доказательство. С помощью формул (9) и (11) разность $w(z) - \mathcal{P}_n(z)$ представим в виде

$$w(z) - \mathcal{P}_n(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\varsigma,G)(w(\varsigma) - w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))d\varsigma -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{K_n(t)}dt\int_{\Gamma}\Omega_2(z,\varsigma,G)\overline{(w(\varsigma) - w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))d\varsigma}. \qquad (12)$$

Пусть F - замкнутое подмножество области G и $d = d(F,\Gamma) > 0$.

Обозначим $\alpha(t)=\max\limits_{\varsigma\in\Gamma}\left|\omega(\varsigma)-\omega(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))\right|$. Так как при $\varsigma\in\Gamma$ $\psi(\Phi(\varsigma)e^{\pm it})\to\psi(\Phi(\varsigma))=\varsigma$ при $t\to 0$, то функция $\alpha(t)$ является непрерывной по t и $\alpha(0)=0$.

Тогда, оценивая (12), найдём:

$$\left|w(z)-\mathcal{P}_n(z,G)\right|\le A_1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|K_n(t)\right|dt\int\limits_{\Gamma}\frac{\alpha(t)}{d}\left|d\varsigma\right|\le$$

$$\le\frac{A_2}{d}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|K_n(t)\right|\alpha(t)dt\le\frac{A_2}{d}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\alpha(t)\left|K_n(t)\right|dt+$$

$$+\left\|\alpha\right\|\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]}\left|K_n(t)\right|dt\le\frac{A_3}{d}\left(A_4\max_{t\in[-\delta,\delta]}\alpha(t)+o(1)\right).$$

Из полученной оценки следует утверждение теоремы.

Если на границу Γ области G наложить некоторые ограничения, то теорема 2 может быть уточнена.

Справедлива

Теорема 3. Пусть функция $\psi'(\omega)\in L_2$, а ядра $K_n(t)$ вида (1) удовлетворяют условиям:

1) $\int\limits_{0}^{\pi}\left|K_n(t)\right|dt<A_5$;

2) $\int\limits_{0}^{\pi}t\left|K_n(t)\right|dt=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Тогда

$$\max_{z\in F_d}\left|w(z)-\mathcal{P}_n(z,G)\right|\le\frac{A_9}{d}\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности функции $w(z)$ на границе Γ, A_9 - постоянная, не зависящая от 0, d и $w(z)$.

Доказательство. На основании (12) имеем:

$$\left|w(z)-\mathcal{P}_n(z,G)\right|\le\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|K_n(t)\right|dt\int\limits_{\Gamma}\left|\Omega_1(z,\varsigma,G)\right|\left|(w(\varsigma)-w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))\right|\left|d\varsigma\right|+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\overline{\left|K_n(t)\right|}dt\int\limits_{\Gamma}\left|\Omega_1(z,\varsigma,G)\right|\overline{\left|(w(\varsigma)-w(\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it}))\right|\left|d\varsigma\right|}\le$$

$$\le\frac{A_6}{d}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|K_n(t)\right|\omega(|t|)dt\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{|t|}\left|\varsigma-\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it})\right|+1\right)\left|d\varsigma\right|\le$$

$$\le\frac{A_6}{d}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|K_n(t)\right|\omega(|t|)dt\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{|t|}\left|\varsigma-\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it})\right|\left|d\varsigma\right|+\frac{A_7}{d}\omega\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (13)$$

Интеграл

$$\frac{1}{|t|}\int_{\Gamma}\left|\varsigma-\psi(\Phi(\varsigma)e^{-it})\right|\left|d\varsigma\right|\le A_8,$$

т.к. $\psi'(\omega)\in L_2$ (см. [2]).

Подставляя эту оценку в (13), для всех $z\in F_d$ получим

$$\left|w(z)-\mathcal{P}_n(z,G)\right|\le\frac{A_8}{d}\int_0^{\pi}\left|K_n(t)\right|\omega\left(\frac{1}{n}\right)(nt+1)dt+\frac{A_7}{d}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{A_9}{d}\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988, 512 с.
2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977, 508 с.
3. Тагиева М.А. О разложении обобщённых аналитических функций в ряд по обобщённым полиномам Фабера в замкнутой области // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2011, №4, с.55-60.
4. Тагиева М.А. Обобщённый оператор Фабера в пространстве голоморфных функций // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2010, №4, с.59-65.

QAPALI OBLASTDA ÜMUMİLƏŞMİŞ ANALİTİK FUNKSİYALARIN APPROKSİMASİYASININ ÜMUMİLƏŞMƏSİ HAQQINDA

M.A.TAĞIYEVA

XÜLASƏ

İşdə ümumiləşmiş Faber çoxhədliləri üzrə cəmlənən sıranın xüsusi cəminin inteqral göstərişi alınır və belə ümumiləşmiş çoxhədlilər ardıcıllığının düzləndirilə bilən analitik Jordan əyrisi ilə məhdudlaşan oblast daxilində analitik ümumiləşmiş funksiyaya yığılması isbat edilmişdir.

Açar sözləri: ümumiləşmiş analitik funksiyalar, ümumiləşmiş Faber çoxhədliləri, polinomial nüvə.

ON THE APPROXIMATION OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS IN A CLOSED DOMAIN

M.A.TAGIYEVA

SUMMARY

In this paper, the approximation of generalized analytic functions by partial sums of a series by Faber's generalized polynomials in domain with Jordan rectifiable boundary is considered.

Key words: generalized analytic functions, Faber's generalized polynomials, Jordan rectifiable curve, polynomial kernel.

Поступила в редакцию: 25.02.2015 г.
Подписано к печати: 18.06.2015 г.